Theorie Woche 2:

◦ Matrixinverse: Skript S. 20

Eigenschaften und Definition finden sich im Dokument der 1. Woche "Matrizeneigenschaften"

- Gauss-Jordan-Algorithmus: (Kochrezept)

  Wir schreiben die zu invertierende Matrix A und die Einheitsmatrix I_n nebeneinander und wenden das Gaussverfahren an, bis wir aus A die Einheitsmatrix gemacht haben:

$$A \mid I_n \Rightarrow I_n \mid A^{-1}$$

⚠ Hierfür müssen wir das Gaussverfahren etwas erweitern:

(i) Normal ZSF erreichen

(ii) Jede Zeile durch ihr Pivot teilen (beidseitig!)

↳ Erhalten so 1 auf der Diagonalen.

(iii) Gaussverfahren nach oben anwenden

Beispiel 2.1:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{III}-7\text{I}]{\text{II}-4\text{I}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -13 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{III}-2\text{II}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} :1 \\ \xrightarrow{:-3} \\ :-1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\mathrm{I}-3\mathrm{III}]{\mathrm{II}-2\mathrm{III}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{13}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{I}-2\mathrm{II}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{13}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix} -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} & -1 \\ \frac{10}{3} & -\frac{13}{3} & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{matrix}}_{\underline{\underline{A^{-1}}}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A^{-1}}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -8 & 8 & -3 \\ 10 & -13 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}}}$$

∘ Transponierte einer Matrix: Skript S. 18

Eigenschaften und Definition finden sich im Dokument der 1. Woche "Matrizeneigenschaften".

↳ Im Prinzip einfach eine Spiegelung der Matrix (oder auch Vektors) an der Hauptdiagonalen.

Beispiel 2.2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}$$

∘ Euklidische Norm & Skalarprodukt: —

Zur Beschreibung von Orthogonalität und auch Länge benötigen wir Normen und Skalarprodukte. Anfangs betrachten wir die bereits bekannte euklidische Norm und das Skalarprodukt.

- Die euklidische Norm eines Vektors bezeichnet dessen Länge im $\mathbb{R}^n$, man schreibt hierfür $\|\underline{b}\|_2$, meist abgekürzt zu $\|\underline{b}\|$.

$\|\cdot\|_2$ ist definiert als:

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \rightsquigarrow \|b\|_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Beispiel 2.3:

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \|b\|_2 = \sqrt{2 + 9 + 25} = \sqrt{36} = \underline{\underline{6}}$$

- Das Skalarprodukt gibt uns Auskunft darüber, ob 2 Vektoren orthogonal aufeinander liegen. Man schreibt $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ für das Skalarprodukt der Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$. Gilt $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = 0$, so stehen die beiden Vektoren gemäss dieser Norm senkrecht aufeinander.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist definiert als: $\quad \underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \underline{a}^T \cdot \underline{b} = [a_1 \ \ a_2] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Beispiel 2.4:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = [1 \ \ 2] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 + 6 = \underline{\underline{8}} \rightsquigarrow \text{nicht orthogonal}$$

$$\langle \underline{a}, \underline{c} \rangle = [1 \ \ 2] \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 + 2 = \underline{\underline{0}} \rightsquigarrow \text{orthogonal}$$

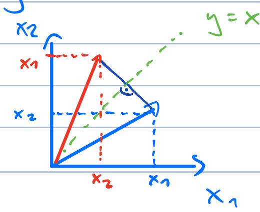
∘ Orthogonale Matrizen & Vektoren: Skript S. 22

Eigenschaften und Definition finden sich im Dokument der 1. Woche "Matrizeneigenschaften".

⚠ Es heisst zwar orthogonale Matrix, dies ist aber historisch bedingt, die Spalten (und Zeilen?) der Matrix stehen jedoch orthonormal aufeinander (also haben sie alle Länge 1!).

Beispiel 2.5: $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ beschreibt eine Spiegelung an der Geraden $y = x$

$$\Rightarrow \quad \underline{Q} \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}}}$$

$\Rightarrow$ 

- Orth. Matrizen mit Determinante $= -1$ $\hat{=}$ Drehspiegelung
- Orth. Matrizen mit Determinante $= 1$ $=$ Drehung

Beispiele sind Givensrotationsmatrizen und Householdermatrizen, nächste Woche mehr dazu.

(Die Determinante betrachten wir zu einem späteren Zeitpunkt)